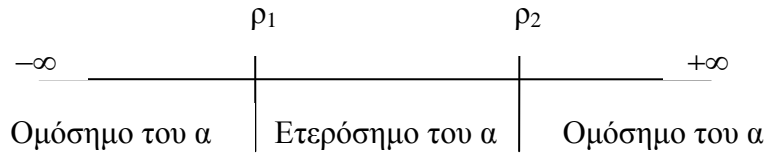


## Πρόσημο τριωνύμου $ax^2 + bx + \gamma$ και παραγοντοποίηση

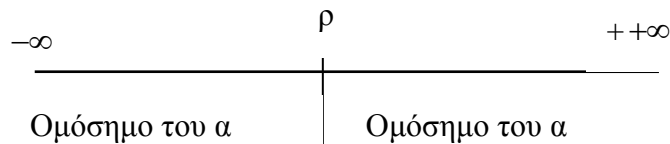
1. Βρίσκουμε την διακρίνουσα  $\Delta$  του τριωνύμου και αν:

i) Αν  $\Delta > 0$  τότε το τριώνυμο έχει **δύο ρίζες**  $\rho_1, \rho_2$  και το πρόσημο του διαμορφώνεται ως εξής:



Και το τριώνυμο παραγοντοποιείται:  $ax^2 + bx + \gamma = a(x - \rho_1)(x - \rho_2)$

ii) Αν  $\Delta = 0$  τότε το τριώνυμο έχει μια **διπλή ρίζα**  $\rho = -\frac{\beta}{2a}$  οπότε το πρόσημο του παραμένει **ομόσημο του alpha για κάθε  $x \neq \rho$** .



Και το τριώνυμο παραγοντοποιείται  $ax^2 + bx + \gamma = a(x - \rho)^2$

iii) Αν  $\Delta < 0$  τότε το τριώνυμο **δεν έχει ρίζες** και είναι **πάντα ομόσημο του alpha** επίσης δεν παραγοντοποιείται

1. Να παραγοντοποιηθούν και να απλοποιηθούν (όπου είναι δυνατόν) οι παραστάσεις:

α)  $3x^2 + 5x - 2$

β)  $x^2 - 2ax + a^2 - \beta^2$

γ)  $x^4 - 5x^2 + 4$

δ)  $x^6 - 7x^3 - 8$

ε)  $\frac{4x^2 - 14x + 6}{2x^2 - 4x - 6}$

στ)  $\frac{x^2 - (\lambda - 1)x - \lambda}{x^2 - (\lambda + 1)x + \lambda}$

ζ)  $\frac{(x^2 + 3x - 4)(x^2 - 4x - 5)}{(x^2 - 1)(x^2 - x - 20)}$

η)  $\frac{x^2 - ax - 6a^2}{x^2 - 7ax + 12a^2}$

θ)  $\frac{x^3 + 2ax^2 + a^2x}{ax^2 - a^3}$

2. Δίνεται το τριώνυμο  $f(x) = 6x^2 - 5x - 6$ .

a. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου, για τις διάφορες τιμές του x.

b. Να συμπληρώσετε τα επόμενα κενά με ένα από τα σύμβολα  $<, >, =$ .

α)  $f(\sqrt{2}) \dots 0$

β)  $f(-0, 667) \dots 0$

γ)  $f(1, 534) \dots 0$

δ)  $f(1, 5) \dots 0$

ε)  $f(\frac{11}{7}) \dots 0$

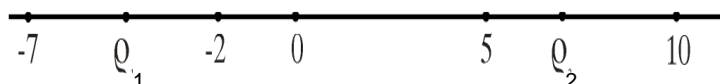
στ)  $f(0,6) \dots 0$

3. Αν το τριώνυμο  $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$  έχει  $\Delta < 0$ , ποια από τις παρακάτω ανισώσεις αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$ ;

A.  $f(x) < 0$                       B.  $-3f(x) \geq 0$                       Γ.  $(x^2 + 1) \cdot f(x) > 0$

Δ.  $\frac{f(x)}{x^2+1} < 0$                       Ε.  $\frac{f(x)}{x^2+1} \leq 0$

4. Στον παρακάτω άξονα είναι τοποθετημένες οι ρίζες  $\rho_1, \rho_2$  της εξίσωσης  $-x^2 + \beta x + \gamma = 0$  και οι αριθμοί  $-7, -2, 5, 10$ .



Αν  $f(x) = -x^2 + \beta x + \gamma$  να συμπληρώσετε το κατάλληλο σύμβολο ( $>$ ) ή ( $<$ ) στα παρακάτω κενά

$f(-7) \dots 0$                        $f(-2) \dots 0$

$f(5) \dots 0$                        $f(10) \dots 0$

5. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α)  $f(x) = \sqrt{3x^2 - 4x + 1}$     β)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 9x + 18}$                       γ)  $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}$

6. Να γράψετε χωρίς απόλυτη τιμή την παράσταση  $A = |x^2 - 2x - 3| + x^2 - 3x$  για τις διάφορες τιμές του  $x \in R$

7. Να λυθεί το σύστημα των ανισώσεων:

α)  $\begin{cases} x^2 + 3x - 4 < 0 \\ -x^2 + x + 6 \geq 0 \end{cases}$                       β)  $x \leq x^2 < x^3$                       γ)  $3 < \frac{2x-1}{x+3} \leq 5$

8. Να βρείτε το  $\lambda \neq 1$  ώστε το τριώνυμο  $(\lambda - 1)x^2 - 4x + \lambda + 2$  να:

α) έχει σταθερό πρόσημο για κάθε  $x \in R$

β) έχει αρνητικό πρόσημο για κάθε  $x \in R$ .

**Ένα τριώνυμο  $ax^2 + \beta x + \gamma$ ,  $a \neq 0$  διατηρεί για κάθε  $x \in R$ :**

**α) σταθερό πρόσημο αν  $\Delta < 0$**

**β) θετικό πρόσημο αν  $\Delta < 0$  και  $a > 0$**

**γ) αρνητικό πρόσημο αν  $\Delta < 0$  και  $a < 0$**

9. Να προσδιοριστεί ο  $\lambda \neq 0$  ώστε η ανίσωση  $\lambda x^2 + (\lambda - 1)x + (\lambda - 1) < 0$  να ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$ .

10. Να προσδιοριστεί ο  $\lambda \in R$  ώστε η ανίσωση  $x^2 - 2(4\lambda - 1)x + 15\lambda^2 - 2\lambda - 7 > 0$  να ισχύει για κάθε  $x \in R$ .

11. Να προσδιοριστεί ο  $\lambda \neq -2$  ώστε η εξίσωση  $(\lambda + 2)x^2 - 2(\lambda - 1)x + 4 = 0$  να μην έχει πραγματικές ρίζες.
12. Έστω ότι η εξίσωση  $x^2 - \lambda(\lambda - 2)x + 2 - \lambda = 0$  έχει δυο ρίζες  $x_1, x_2$ . Να προσδιορισθεί ο  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε να ισχύει  $-1 < x_1 + x_2 + 4x_1x_2 < 0$ .
13. Για τις διάφορες τιμές του  $\kappa$  να εξετάσετε αν η εξίσωση  $x^2 - \kappa x + 2\kappa - 3 = 0$  έχει πραγματικές ρίζες και πόσες.
14. Για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \neq 3$  να εξετασθεί αν έχει ρίζες και πόσες η εξίσωση  $(\lambda - 3)x^2 - (\lambda + 2)x + 2\lambda + 1 = 0$ .
15. Δίνεται η εξίσωση  $-x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ .
- Να αποδειχθεί ότι για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ , η εξίσωση έχει πραγματικές και άνισες ρίζες.
  - Να βρεθούν τα  $\lambda \in \mathbb{R}$  για τα οποία ισχύει  $x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 \geq 0$  όπου  $x_1, x_2$  είναι οι λύσεις της εξίσωσης.
16. Έστω η εξίσωση  $x^2 - (\lambda + 3)x + \lambda + 2 = 0$  με  $\lambda \neq -1$ .
- Δείξτε ότι η εξίσωση έχει δυο πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε  $\lambda \neq -1$ .
  - Αν  $x_1, x_2$  οι ρίζες της εξίσωσης να προσδιορίσετε τον αριθμό  $\lambda$  ώστε να ισχύει  $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 < 12$

### Πρόσημο γινομένου και πηλίκου

17. Να λυθούν οι ανισώσεις:

- α)  $(x - 1)(x - 2) > 0$                       β)  $(x + 1)(x + 3) < 0$   
 γ)  $(x^2 + 1)(x - 6) \geq 0$                       δ)  $(x - 5)(x + 1)^2(x + 2)(x - 3) \leq 0$   
 ε)  $x(x^2 - 3x + 2)(2x^2 + 5x + 3)(x^2 + x + 1) < 0$                       ζ)  $x^3 - x^2 - 20x < 0$   
 στ)  $(x + 2)^2(2x^2 - 5x - 3)(3x^2 + 2x + 1) > 0$                       η)  $4x^3 - 20x^2 + 18x \leq 0$   
 θ)  $(x^2 - 4)(x^2 + x - 6)(x + 3)^2 < 0$

18. Να λυθούν οι ανισώσεις

- α)  $\frac{(x-1)^2}{x^2-x-2} \leq 0$                       β)  $\frac{(x-1)^2}{x^2-x-2} \geq 0$   
 γ)  $\frac{(x+2)(x^2-x+1)}{-x^2+x+6} \geq 0$                       δ)  $\frac{(x^2+5)(x^2-7x+12)}{4-x} \leq 0$   
 ε)  $x^2(3+2x)(-x^2+x+2) \leq 0$                       στ)  $x^2(3+2x)(-x^2+x+2) > 0$   
 ζ)  $-2x < 2x^2 \leq x^3 + x$                       η)  $|x^2 + 5x + 2| < 0$

19. Να λυθούν οι ανισώσεις:

- α)  $\frac{x^2 + 3x - 4}{x(x + 3)} < 0$                       β)  $\frac{4x}{3x - x^2} \geq \frac{1}{2}$                       γ)  $\frac{7x^2}{x^3 + 3x^2} > 0$

$$\delta) \frac{3x-1}{x+2} \geq 2 \quad \varepsilon) \frac{2x^2-4x+5}{x^2+2} \leq 1 \quad \sigma\tau) \frac{x^2-4x+3}{x-2} > 0$$

$$\zeta) \frac{1}{x^2-2x-15} > \frac{1}{x^2-x-2}$$

20. Να λυθεί η ανίσωση:  $\frac{2x}{x-1} + \frac{3x-1}{3x+1} < 2$

21. Ναδειχθεί ότι για κάθε  $x \in (1, 4)$  το κλάσμα  $A = \frac{x^2-5x+4}{x^2+2x+1}$  είναι αρνητικό.

22. α) Να βρεθεί το πρόσημο του γινομένου  $A = (x^2 - 10x + 21)(x^2 - 5x + 4)$

β) Να λυθεί ή ανίσωση:  $\frac{x^2-10x+21}{x^2-5x+4} < 0$

γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:  $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-10x+21}{x^2-5x+4}}$

23. Να λυθεί η ανίσωση  $\left| x - \frac{4}{x} - 2 \right| \geq 1$